Heinrich Heine Universität Düsseldorf

PD. Dr. Karin Halupczok
M.Sc. Thor Wittich

Zahlentheorie I (Algebraische Zahlentheorie), WiSe 22/23
Blatt 1

Aufgabe 1 (5 Punkte):
Sei $m = p_1^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{\nu_r}$ eine positive ganze Zahl in Primfaktorzerlegung. Bekanntlich besagt eine Formulierung des chinesischen Restsatzes, dass die kanonische Abbildung $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to \prod_{i=1}^r \mathbb{Z}/p^{\nu_i}\mathbb{Z}$ ein Isomorphismus von Ringen ist. Sei nun $f \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$. Zeigen Sie, dass unter dem soeben erwähnten Isomorphismus die beiden Mengen

$$\{a \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^n \mid f(a) = 0\} \text{ und } \prod_{i=0}^{r} \{a_i \in (\mathbb{Z}/p^{\nu_i}\mathbb{Z})^n \mid f(a) = 0\}$$

miteinander identifiziert werden.

Aufgabe 2 (5 Punkte):
Zeigen Sie, dass die Gleichung $x^3 + y^3 = z^3$ für $3 \nmid xyz$ keine ganzzahligen Lösungen hat, indem Sie diese in $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ betrachten.

Aufgabe 3 (5 Punkte):
Bestimmen Sie für jede Primzahl p und jede nicht-negative ganze Zahl m die Anzahl der Lösungen der Gleichung $y - f = 0$ in $(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})^{1+n}$, wobei f ein ganzzahliges Polynom in den Unbestimmten $x_1, \ldots, x_n$ ist.

Aufgabe 4 (5 Punkte):
Bestimmen Sie für jede Primzahl p und jede nicht-negative ganze Zahl m die Anzahl der Lösungen der Gleichung $xy = 0$ in $(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})^2$.